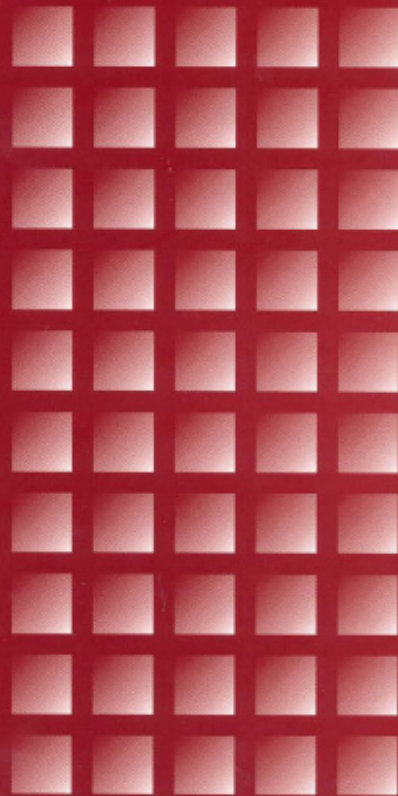


Mihail Voicu

# TEORIA SISTEMELOR



 Editura  
Academiei  
Române

## *P r e f a ț ă*

Cu toate că formalismul riguros al *concepției sistemice* a fost elaborat în cadrul științelor exacte, principiile de bază ale acestei noi concepții au apărut simultan în mai multe domenii științifice: teoria circuitelor electrice, electronică, automatică, biologie, neurofiziologie, psihologie, sociologie, științe economice etc.

În secolul al XIX-lea, în perioada de avânt a tuturor științelor, sub influența mecanicii *newtoniene*, a spiritului *laplacean* și ca urmare a complexității fenomenelor, cercetarea științifică a avut un *caracter analitic*. S-a obținut astfel un volum considerabil de cunoștințe în toate științele. Când aceste cunoștințe au depășit un anumit nivel, în câteva domenii științifice s-a constatat că oricât de abundente ar fi cunoștințele asupra unor elemente dispartate, acestea nu permit înțelegerea funcționării ansamblului pe care elemente îl formează. *Ansamblul sau sistemul posedă proprietăți noi care nu pot fi puse în evidență numai în elementele componente luate separat.*

Un sistem este *un complex de elemente în interacțiune*. El se evidențiază prin structura și conexiunile sale interne, care constituie o unitate relativ delimitată față de mediu. Comportarea unui sistem depinde nu numai de proprietățile elementelor sale ci, mai ales, de *interacțiunile* dintre ele. Relevant în acest sens este faptul că s-a ajuns la idei și concepte similare, simultan și autonom, în diverse domenii științifice. Progresele din aceste domenii au condus la conceptul de sistem, la formularea legilor care le guvernează și la descoperirea *izomorfismelor* dintre diverse sisteme existente în natură.

*Sistemele reale* procesează *substanță, energie și informație*. Ele sunt conectate cu mediul prin *mărimi cauze* sau *de intrare* și *mărimi efecte* sau *de ieșire*. Între aceste mărimi există o relație cauzală, reprezentabilă abstract printr-un *operator de transfer*. Studiul experimental al sistemelor reale implică interacțiunea cu obiectul analizat și are, în unele situații, aplicabilitate limitată. În mod obișnuit, alături de procedurile experimentale se folosesc *metodele de modelare* care permit explicitarea operatorului de transfer printr-un *model matematic*.

Mihail Voicu, Teoria sistemelor, Editura Academiei Române, București, 2008

Un sistem fiind *un complex de elemente în interacțiune*, urmează că modelul matematic, ca *image* perfectibilă a sistemului real, este el însuși un sistem – un *sistem abstract*. *Sistemele abstracte* reprezintă forma cea mai eficientă de cunoaștere profundă a sistemelor reale. Sistemele abstracte, grupate în clase care le conferă un anumit grad de generalitate, constituie obiectul de studiu al *teoriei matematice a sistemelor*. Diferența față de disciplinele convenționale rezidă în gradul de abstractizare și de generalizare: *sistemul abstract* se referă la caracteristici foarte generale ale unei mari clase de entități, tradițional tratate de discipline diferite. De aici rezultă de fapt natura inter- și multi-disciplinară a teoriei sistemelor.

În acest context disciplina *teoria sistemelor* constituie rezultatul simbiozei între matematicile aplicate și știința și ingineria sistemelor. Originile ei se situează în teoria circuitelor electrice, electronică și telecomunicații, și în mod special în automatică.

Această carte are ca scop prezentarea, într-un mod riguros și inteligibil, a principalelor rezultate privind descrierea matematică a sistemelor dinamice liniare, transferul intrare – stare – ieșire, controlabilitatea și observabilitatea sistemelor dinamice liniare, stabilitatea și stabilizarea sistemelor dinamice liniare, stabilitatea sistemelor automate liniare multivariabile, stabilitatea sistemelor dinamice neliniare (inclusiv metoda invarianței de flux), și conducerea optimală a sistemelor dinamice. Tratarea este atât sistemic – teoretică, prin abordarea matematică adecvată obținerii unor soluții generale riguroase, cât și aplicativă, prin exemple diseminate pe parcursul întregii cărți.

Prin concepție și prin paleta problemelor abordate, cartea se adresează specialiștilor în ingineria sistemelor, automatică, știința calculatoarelor, electrotehnică, electronică, în informatica de proces, dar și în matematici aplicate, în biologia matematică și în științele economice, specialiști care lucrează în învățământ, în cercetare, în proiectare și în industrie. Totodată, cartea deschide studenților în domeniile amintite calea spre cunoștințe avansate de teoria sistemelor, care fac posibile sinteze teoretice și soluții practice eficiente bazate pe produsele oferite de știința și tehnologia informației.

Iași, martie 2008

Mihail Voicu

## CUPRINS

<b>Prefață</b>	<b>5</b>
<b>Capitolul I</b>	
<b>MODELE MATEMATICE ALE SISTEMELOR DINAMICE LINIARE</b>	<b>7</b>
1. Noțiuni introductive	7
1.1. Terminologie și definiții	7
a. Sisteme	7
b. Modelarea sistemelor	8
c. Obiectul teoriei sistemelor	9
d. Sisteme continue în timp și sisteme non-anticipative	10
1.2. Sisteme dinamice	11
1.3. Sisteme dinamice invariante în timp	14
1.4. Sisteme dinamice liniare	17
a. Matricea fundamentală și matricea de tranziție	20
b. Soluția ecuației neomogene intrare – stare	22
1.5. Sisteme dinamice liniare invariante în timp	25
a. Matricea fundamentală și matricea de tranziție	26
b. Soluția ecuației neomogene intrare – stare	29
c. Ecuațiile liniarizate ale unui sistem dinamic neliniar, neted, finit dimensional și invariant în timp	30
1.6. Reprezentări prin modele liniare invariante în timp	32
2. Reprezentarea de stare	33
2.1. Ecuațiile de stare	33
2.2. Structura algebrică a matricei de tranziție	36
a. Explicitarea bazată pe formula Lagrange – Sylvester	37
b. Explicitarea bazată pe teorema Cayley – Hamilton	39
2.3. Structura modală a matricei de tranziție	41
a. Cazul valorilor proprii simple	41
b. Cazul valorilor proprii multiple	43
c. Matrice nederogatorice și matrice derogatorice	48
3. Transferul intrare – stare – ieșire	55
3.1. Răspunsul complet	55
3.2. Răspunsul forțat	57
3.3. Transferul decuplat	59
3.4. Transferul rezonant	63
3.5. Transferul blocat	65
a. Transferul antirezonant	65
b. Alte cazuri de transfer blocat	68
4. Transferul intrare – ieșire	69
4.1. Matricea de transfer	69
a. Problema obținerii unei realizări a matricei de transfer	70
b. Problema polilor și zerourilor	71

c. Utilizarea teoremei dezvoltării	72
4.2. Forma Smith – McMillan a matricei de transfer	73
4.3. Forma Smith a matricei numărător	77
a. Determinarea formei Smith prin operații elementare	78
b. Determinarea formei Smith – McMillan cu ajutorul formei Smith	81
4.4. Polinoamele polilor și zerourilor de transmisie	83
5. Frații de matrice	87
5.1. Definiții	87
a. Definiția bazată pe forma Smith – McMillan	88
b. Definiția bazată pe reprezentarea de stare	92
c. Forme unice	92
5.2. Poli și zerouri de transmisie	93
6. Reprezentarea polinomială	97
6.1. Preliminarii	97
6.2. Definiții	99
6.3. Transformări echivalente	100
6.4. Poli și zerouri de decuplare	102
a. Poli	
b. Zerouri de decuplare la intrare	102
c. Zerouri de decuplare la ieșire	103
d. Proprietăți de invarianță la transformări echivalente în sens strict	104
e. Reprezentări polinomiale ireductibile	104
f. Zerouri de decuplare la intrare – ieșire	105
6.5. Zerourile matricei de sistem	106

## Capitolul II

### CONTROLABILITATEA ȘI OBSERVABILITATEA

#### SISTEMELOR DINAMICE LINIARE

109

1. Analiza bazată pe reprezentarea de stare	109
1.1. Definiții și caracterizări	110
a. Controlabilitatea stării; gradul de controlabilitate	110
b. Observabilitatea stării; gradul de observabilitate	116
c. Controlabilitatea ieșirii	119
d. Zerourile de decuplare	120
e. Controlabilitatea și observabilitatea stării sunt proprietăți generice	124
1.2. Structura spațiului stărilor	125
a. Subspațiul complet controlabil	125
b. Subspațiul neobservabil	130
c. Descompunerea canonică Kalman	135
1.3. Forme canonice	142
a. Forma canonică controlabilă	142
b. Forma canonică observabilă	145
2. Analiza bazată pe reprezentarea polinomială	149
2.1. Controlabilitatea stării parțiale	149
2.2. Observabilitatea stării parțiale	151
3. Controlabilitatea funcțională și observabilitatea funcțională	153

3.1. Inversabilitatea matricelor de transfer	153
3.2. Controlabilitatea funcțională a ieșiri	156
3.3. Observabilitatea funcțională a intrării	157
3.4. Condiții de inversabilitate	159
4. Realizări ale matricei de transfer	163
4.1. Realizări directe	163
4.2. Realizări minimale	169
a. Ordinul unei realizări minimale	172
b. Determinarea unei realizări minimale	177
4.3. Realizări echilibrate	181
4.4. Realizări de ordin redus	183

### **Capitolul III**

#### **STABILITATEA ȘI STABILIZAREA SISTEMELOR**

##### **DINAMICE LINIARE**

**185**

1. Stabilitatea internă	185
1.1. Definiții	185
1.2. Caracterizări	188
1.3. Structura spațiului stărilor	191
1.4. Ecuația Liapunov	195
2. Stabilitatea externă	197
2.1. BIBO stabilitatea	198
2.2. Relații cu stabilitatea asimptotică	200
3. Metode polinomiale	201
3.1. Criteriile Hurwitz și Routh	201
3.2. Stabilitatea relativă	203
3.3. Polinoame interval și domenii parametrice de stabilitate	204
a. Polinoame interval (criteriul Haritonov)	204
b. Domenii parametrice de stabilitate	205
4. Problema stabilizării	207
4.1. Reacția după stare	207
a. Alocarea valorilor proprii	209
b. Stabilizarea prin reacție după stare	212
c. Utilizarea ecuației Liapunov	215
4.2. Reacția după ieșire	217
4.3. Estimatorul asimptotic de stare	218
a. Estimatorul de stare de tip identitate	219
b. Detectarea stării	220
c. Estimatorul de stare de ordin minim	221
d. Determinarea unui estimator de ordin minim	223
e. Reacția după starea estimată	227

### **Capitolul IV**

#### **SISTEME AUTOMATE LINIARE MULTIVARIABILE**

**229**

1. Analiza stabilității	229
1.1. Descrierea matematică	230

1.2. Stabilitatea internă și stabilitatea externă	232
1.3. Rezultate bazate pe teorema Hsu – Chen	236
a. Determinantul matricei diferență a reacției	236
b. Zerouri invariante și poli invarianți	237
c. Rezultate de stabilitate	241
2. Generalizarea criteriului Nyquist	243
2.1. Funcțiile de transfer caracteristice	243
a. Definirea funcțiilor de transfer caracteristice	243
b. Polinoame ireductibile	246
c. Puncte de ramificare	247
d. Locurile de transfer caracteristice	248
2.2. Aplicarea principiului argumentului	249
a. Funcțiile de transfer caracteristice ale matricei diferență a reacției	249
b. Variația totală a argumentului	250
2.3. Criterii Nyquist generalizate	251
a. Criterii pentru sisteme automate cu reacție unitară	251
b. Criterii pentru sisteme automate cu reacție neunitară	253
3. Sisteme diagonal dominante	255
3.1. Dominanța diagonală în domeniul frecvențelor	255
3.2. Criterii de BIBO stabilitate	258

## Capitolul V

### SISTEME DINAMICE NELINIARE

263

1. Preliminari	263
2. Metoda planului stărilor	265
2.1. Portretul de stare	266
2.2. Sisteme dinamice liniare de ordinul doi	268
a. Sistem simplu, valori reale și distincte	268
b. Sistem simplu, valori proprii complex conjugate	270
c. Sistem simplu, valori proprii reale și egale	273
d. Sistem nesimplu, valori proprii reale	274
2.3. Sisteme dinamice neliniare de ordinul doi	275
a. Sisteme calitativ echivalente	275
b. Utilizarea sistemelor liniarizate	275
c. Cicluri limită	282
d. Cazul neliniarității de tip releu	286
3. Metoda directă Liapunov	289
3.1. Funcții Liapunov	289
3.2. Caracterizări	290
a. Condiții de stabilitate și de stabilitate asimptotică	290
b. Condiții de instabilitate	293
c. Utilizarea aproximantului liniar	294
3.3. Existența și construcția unei funcții Liapunov	295
a. Metoda Krasovski	296
b. Metoda Ingwerson	297
c. Metoda Schultz – Gibson	299

3.4. Domenii de stabilitate	300
a. Preliminarii	300
b. Metoda Zubov	302
c. Metoda Grujic	305
4. Sisteme automate neliniare multivariabile	309
4.1. Hiperstabilitatea	309
a. Structura sistemului automat neliniar multivariabil	309
b. Definiții și caracterizări	310
4.2. Sisteme autoadaptive hiperstabile	313
a. Procedeele de autoadaptare	313
b. Sinteza comenzilor de autoadaptare	314
5. Metoda invarianței de flux	319
5.1. Evoluția restricționată a sistemelor dinamice	319
a. Preliminarii	319
b. Definiția și caracterizarea evoluției restricționate	319
c. Evoluția restricționată pe componente]	321
d. Sisteme dinamice liniare constante	322
5.2. Stabilitatea asimptotică pe componente	323
a. Sisteme dinamice neliniare	323
b. Sisteme dinamice liniare constante	325
5.3. Stabilitatea exponențial asimptotică pe componente	325
5.4. Stabilitatea absolută pe componente	328
5.5. Detectarea și stabilizarea pe componente	329
a. Detectarea exponențial asimptotică pe componente	329
b. Stabilizarea exponențial asimptotică pe componente	333
5.6. Sinteza comenzii alunecătoare	335
a. Condiții de alunecare	335
b. Rezultate pregătitoare	336
c. Structura de flux indusă de mișcarea alunecătoare	337
d. Procesul de atingere – precursor în flux al mișcării de alunecare ideale	338
e. Comanda alunecătoare a unui sistem dinamic liniar perturbat	338
<b>Capitolul VI</b>	
<b>CONDUCEREA OPTIMALĂ A SISTEMELOR DINAMICE</b>	<b>341</b>
1. Indici de calitate	341
1.1. Exemple de indici de calitate	341
1.2. Forme generale ale indicelui de calitate	344
2. Rezultate fundamentale	345
2.1. Definiții	345
2.2. Condiții necesare	347
a. O condiție necesară de extrem	347
b. Lema fundamentală a calcului variațional	349
3. Sinteza comenzii optimale	351
3.1. Formularea problemei	351
a. Formulare preliminară	351



b. Indicele de calitate extins	352
3.2. Ecuțiile Hamilton	353
a. Problema cu orizont finit fixat și stare finală fixată	353
b. Problema cu orizont finit fixat și stare finală liberă	355
c. Problema cu orizont finit liber și stare finală fixată	356
d. Problema cu orizont finit liber și stare finală liberă	356
e. Problema cu orizont finit liber și stare finală pe o traiectorie dată	357
f. Problema cu orizont finit fixat și starea finală pe o suprafață dată	357
g. Problema cu orizont finit liber și starea finală pe o suprafață dată	358
3.3. Sisteme dinamice cu legături suplimentare	360
a. Legături punctuale	360
b. Legături globale	361
4. Sinteza comenzii optimale pentru sisteme dinamice liniare	363
4.1. Ecuția Riccati	363
4.2. Ecuția algebrică Riccati	366
5. Principiul minimului	369
5.1. Probleme de conducere optimală cu restricții	369
5.2. Generalizarea condiției necesare de extrem	370
5.3. Problema timpului minim	372
6. Programarea dinamică	377
6.1. Principiul optimalității	377
6.2. Forma discretă a programării dinamice	378
<b>ANEXE</b>	<b>383</b>
Anexa A. Spații vectoriale normate	383
Anexa B. Matrice polinomiale	384
Anexa C. Forme pătratice și forme hermitice	387
Anexa D. Calculul valorilor proprii ale matricei de răspuns la frecvență	389
Anexa E. O formula Schur pentru matrice partiționate	391
Anexa F. Principiul argumentului	392
Lista de simboluri și abrevieri	393
Bibliografie	395
Cuprins	411